

1 Adjoint d'un endomorphisme

Exercice 1 ★★ Forme linéaire sur les matrices –

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi \in E^*$. Démontrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\varphi(M) = \text{Tr}(AM)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3308]

Exercice 2 ★ Déterminer l'adjoint –

Soit E un espace vectoriel euclidien, $a, b \in E$. Déterminer l'adjoint f^* de $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par :

$$\forall x \in E, f(x) = \langle a, x \rangle b - \langle b, x \rangle a.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3305]

Exercice 3 ★ Adjoint de la multiplication à gauche (et à droite) –

On munit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^T B)$. Pour $A \in E$, on définit les endomorphismes R_A et L_A de E par $R_A(M) = MA$ et $L_A(M) = AM$. Déterminer les adjoints de R_A et de L_A .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3307]

Exercice 4 ★★ Endomorphisme u et $u^* \circ u$ –

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Démontrer que $\ker(u) = \ker(u^* \circ u)$.
2. Démontrer que $\text{Im}(u^*) = \text{Im}(u^* \circ u)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3306]

Exercice 5 ★★★★★ Noyaux de polynômes en f et f^* –

Soit E un espace vectoriel euclidien, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ premiers entre eux. Démontrer que $\ker(P(f)) \perp \ker(Q(f^*))$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3323]

Exercice 6 ★★★★★ Sur l'adjoint d'un projecteur –

Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur.

1. Démontrer que f^* est un projecteur.
2. Montrer que $f^* = f$ si et seulement si f est la projection orthogonale sur $\text{Im}(f)$.
3. On suppose que f et f^* commutent.

Démontrer que $f \circ f^*$ est une projection orthogonale. Démontrer que $\ker(f \circ f^*) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$. En déduire que $\ker(f \circ f^*) = \ker(f)$ et que $\text{Im}(f \circ f^*) = \text{Im}(f)$.

4. Démontrer que $f \circ f^*$ est une projection orthogonale.
5. Démontrer que $\ker(f \circ f^*) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$.
6. En déduire que $\ker(f \circ f^*) = \ker(f)$ et que $\text{Im}(f \circ f^*) = \text{Im}(f)$.
7. En déduire que f et f^* commutent si et seulement si $f = f^*$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1096]

2 Endomorphisme autoadjoint et matrice symétrique

Exercice 7 ★ Polynôme annulateur d'une matrice symétrique –

Soit $n \geq 1$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $S^4 = 2S^3 - 3S^2$. Démontrer que $S = 0$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1082]

Exercice 8 ★★ En pratique - 1 –

Justifier que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable, et trouver $P \in O_3(\mathbb{R})$ tel que $P^T A P$ soit diagonale.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1085]

Exercice 9 ★ Produit scalaire nul –

Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E vérifiant, pour tout $x \in E$, $\langle u(x), x \rangle = 0$. Que dire de u ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1073]

Exercice 10 ★ Matrice symétrique à puissance nulle –

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$. Que vaut A ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1077]

Exercice 11 ★ Inversible ? –

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Est-ce que la matrice $A + iI_n$ est inversible ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1715]

Exercice 12 ★★★ Calcul de la norme –

Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E de dimension n . On note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de u , comptées avec leur multiplicité. Démontrer que, pour tout $x \in E$, on a

$$\lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle u(x), x \rangle \leq \lambda_n \|x\|^2.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1074]

Exercice 13 ★★ Une condition nécessaire et suffisante pour que le spectre soit contenu dans un intervalle –

Soit E un espace euclidien, $u \in \mathcal{S}(E)$ et $a \leq b$ deux réels. Démontrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\text{Sp}(u) \subset [a, b]$;
2. $\forall x \in E, \langle u(x) - ax, u(x) - bx \rangle \leq 0$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3322]

Exercice 14 ★★★ Image numérique –

Soit E un espace vectoriel euclidien et u un endomorphisme symétrique de E . On note m la plus petite et M la plus grande des valeurs propres de u . On appelle image numérique de u et on note $W(u)$ l'ensemble $\{\langle u(x), x \rangle; x \in E, \|x\| = 1\}$. Le but de l'exercice est de démontrer que $1 \in W(u)$ si et seulement si $1 \in [m, M]$.

1. Démontrer que, pour tout $x \in E$, on a $m\|x\|^2 \leq \langle u(x), x \rangle \leq M\|x\|^2$. Que peut-on en conclure ?

2. Soit $e, f \in E$ de norme 1 tels que $u(e) = me$ et $u(f) = Mf$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $g(\theta) = (\cos \theta)e + (\sin \theta)f$ et $h(\theta) = \langle u(g(\theta)), g(\theta) \rangle$. Calculer $h(0)$ et $h(\pi/2)$. Que peut-on en déduire ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1717]

Exercice 15 ★★ Norme d'un endomorphisme symétrique –

Soit E un espace vectoriel euclidien. Pour $f \in (E)$, on note $\rho(f) = \max\{|\lambda|; \lambda \text{ valeur propre de } f\}$. On pose également $\|f\| = \sup\{\|f(x)\|; \|x\| \leq 1\}$. Démontrer que si f est symétrique, alors $\|f\| = \rho(f)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1075]

Exercice 16 ★★ Symétrique et orthogonal –

Déterminer les endomorphismes symétriques et orthogonaux d'un espace vectoriel euclidien.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1072]

Exercice 17 ★★ Somme des carrés des coefficients –

Soit E un espace vectoriel euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que, si (e_i) et (f_k) sont deux bases orthonormées de E , alors

$$\sum_{i=1}^n \|u(e_i)\|^2 = \sum_{k=1}^n \|u^*(f_k)\|^2.$$

2. En déduire que la quantité $\sum_{i=1}^n \|u(e_i)\|^2$ est indépendant de la base orthonormée choisie.

3. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice symétrique, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres, comptées avec leur multiplicité. Montrer que

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1097]

Exercice 18 ★★★ Application à une matrice non symétrique –

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que la matrice $A^T A$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont des réels positifs.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1080]

Exercice 19 ★★★ Endomorphismes symétriques qui commutent –

Soient u, v deux endomorphismes symétriques d'un espace euclidien qui commutent, $u \circ v = v \circ u$.

1. Soit λ une valeur propre de u . On pose $F = \ker(u - \lambda Id_E)$. Démontrer que F et F^\perp sont stables par v .

2. Démontrer qu'il existe une base orthonormale de E diagonalisant simultanément u et v .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1083]

Exercice 20 ★★★★★ Théorème de Fischer-Cochran –

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n .

1. Soit $v \in S(E)$ tel que $(v(x), x) = 0$ pour tout $x \in E$. Montrer que $v = 0$.

2. Soient $u_1, \dots, u_p \in S(E)$. On suppose que $rg(u_1) + \dots + rg(u_p) = n$, et que

$$\forall x \in E, (u_1(x), x) + \dots + (u_p(x), x) = (x, x).$$

Montrer que $u_1 + \dots + u_p = Id_E$. Montrer que $E = Im(u_1) \oplus \dots \oplus Im(u_p)$. Montrer que pour tout i , u_i est la projection orthogonale sur $Im(u_i)$.

3. Montrer que $u_1 + \dots + u_p = Id_E$.

4. Montrer que $E = Im(u_1) \oplus \dots \oplus Im(u_p)$.

5. Montrer que pour tout i , u_i est la projection orthogonale sur $Im(u_i)$.

Exercice 21 ★★★★★ **Théorème de Courant-Fischer –**

Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n et $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ ses valeurs propres rangées par ordre croissant. Soit également (e_1, \dots, e_n) une base orthonormale de vecteurs propres associés, ie $f(e_k) = \lambda_k e_k$. On désigne par V_k le sous-espace vect(e_1, \dots, e_k), par W_k le sous-espace vectoriel vect(e_k, \dots, e_n) et par \mathcal{F}_k l'ensemble des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n de dimension $k \in \{1, \dots, n\}$. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ non-nul,

$$R_A(x) = \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|x\|^2}.$$

1. Montrer que $\lambda_1 = \min_{x \neq 0} R_A(x)$ et que $\lambda_n = \max_{x \neq 0} R_A(x)$.
2. Montrer que $\max_{x \in V_k \setminus \{0\}} R_A(x) = \lambda_k$.
3. Soit V un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n de dimension k . Vérifier que $V \cap W_k \neq \{0\}$. En déduire que $\max_{x \in V \setminus \{0\}} R_A(x) \geq \lambda_k$.
4. Dédurre des questions précédentes le théorème de Courant-Fischer :

$$\lambda_k = \min_{V \in \mathcal{F}_k} \max_{x \in V \setminus \{0\}} R_A(x).$$

3 Endomorphismes symétriques positifs et définis positifs**Exercice 22** ★ **Positive ou non ? –**

Dire si les matrices suivantes sont positives, définies positives.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 23 ★ **Identité plus une matrice symétrique positive –**

Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Démontrer que $\det(I_n + A) \geq 1$.

Exercice 24 ★★★★★ **Matrice 2×2 définie positive –**

Soit $A = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$. Démontrer que

$$A \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R}) \iff r > 0 \text{ et } rt > s^2.$$

Exercice 25 ★ **Une relation d'ordre sur les matrices symétriques –**

Pour $(A, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $A \leq B$ si $B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Vérifier que l'on définit ainsi une relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 26 ★★★★★ **Décomposition polaire –**

Soit E un espace vectoriel euclidien. Un endomorphisme symétrique $u \in S(E)$ est dit positif si pour tout x de E , $(u(x), x) \geq 0$. Il est dit défini positif si pour tout x de E non nul, $(u(x), x) > 0$. On notera $S^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs, et $S^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques définis positifs.

1. Soit $u \in S(E)$. Montrer que u appartient à $S^+(E)$ si et seulement si ses valeurs propres sont positives ou nulles. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de $u \in S(E)$ pour que $u \in S^{++}(E)$.

2. Soit $u \in S^+(E)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres (distinctes), et $E_i = \ker(u - \lambda_i \text{Id}_E)$. On définit v_i par $v_i(x) = \sqrt{\lambda_i}x$ si $x \in E_i$, et $v_i(x) = 0$ si $x \in E_i^\perp$. On note enfin $v = v_1 + \dots + v_p$. Justifier que $v^2 = v \circ v = u$, et que v est positif.

3. Soit w un autre élément de $S^+(E)$ tel que $w^2 = u$. Montrer que $wu = uw$. En déduire que $w(E_i) \subset E_i$. Soit w_i l'endomorphisme induit par w sur E_i . Vérifier que w_i est symétrique positif, puis diagonaliser w_i . En déduire que $w = v$.

4. Montrer que $wu = uw$.

5. En déduire que $w(E_i) \subset E_i$.

6. Soit w_i l'endomorphisme induit par w sur E_i . Vérifier que w_i est symétrique positif, puis diagonaliser w_i .

7. En déduire que $w = v$.

8. Soit $f \in GL(E)$. Montrer que $f^* \circ f \in S^{++}(E)$. Montrer qu'il existe un unique couple $(h, g) \in O(E) \times S^{++}(E)$ tel que $f = h \circ g$. Cette factorisation s'appelle décomposition polaire de f .

9. Montrer que $f^* \circ f \in S^{++}(E)$.

10. Montrer qu'il existe un unique couple $(h, g) \in O(E) \times S^{++}(E)$ tel que $f = h \circ g$. Cette factorisation s'appelle décomposition polaire de f .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1090]

4 Matrices orthogonales et isométries vectorielles

Exercice 27 ★ Matrices orthogonales triangulaires supérieures –

Quelles sont les matrices orthogonales triangulaires supérieures ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1059]

Exercice 28 ★★ CNS pour que la matrice soit orthogonale –

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on pose $S = a + b + c$ et $\sigma = ab + bc + ca$, et

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que $M \in O_3(\mathbb{R})$ si et seulement si $\sigma = 0$ et $S = \pm 1$.

2. Démontrer que $M \in SO_3(\mathbb{R})$ si et seulement si $\sigma = 0$ et $S = 1$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1060]

Exercice 29 ★★★ Matrices orthogonales à coefficients entiers –

Démontrer que l'ensemble des matrices de $O_n(\mathbb{R})$ à coefficients (entiers) relatif est fini. Déterminer son cardinal.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3309]

Exercice 30 ★★★★ Sur les coefficients d'une matrice orthogonale –

Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in O_n(\mathbb{R})$. On note (C_1, \dots, C_n) les vecteurs colonnes de M , $v = \sum_{j=1}^n C_j$, et $u = \sum_{j=1}^n e_j$, où (e_1, \dots, e_n) est la base canonique de n muni de son produit scalaire canonique.

1. Montrer que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j} = (u|v)$.

2. En déduire que $|\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j}| \leq n$. Cette inégalité est-elle optimale ?

3. Démontrer que $\sum_{1 \leq i,j \leq n} |m_{i,j}| \leq n^{3/2}$.

4. Démontrer que $\sum_{1 \leq i, j \leq n} |m_{i,j}| \geq n$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1061]

Exercice 31 ★★★★★ Factorisation QR –

1. Soit \mathcal{B} une base d'un espace euclidien E et soit \mathcal{C} l'orthonormalisée de Schmidt de \mathcal{B} . Que dire de la matrice de passage de \mathcal{C} à \mathcal{B} ?

2. Montrer que, pour toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice orthogonale Q et une matrice triangulaire supérieure R dont tous les coefficients diagonaux sont strictement positifs telles que $A = QR$.

3. Démontrer que le couple (Q, R) est unique.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1062]

Exercice 32 ★★ Une symétrie orthogonale –

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$. On considère l'endomorphisme de E défini par $\phi(P)(X) = P(-X)$. Démontrer que ϕ est une symétrie orthogonale.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1070]

Exercice 33 ★★ Une symétrie orthogonale –

Soit E un espace vectoriel euclidien, et $a \in E \setminus \{0\}$. On pose

$$s_a(x) = x - 2 \frac{(a, x)}{(a, a)} a,$$

Montrer que s_a est un endomorphisme orthogonal. Calculer $\ker(s_a - id)$, $\ker(s_a + id)$. Décrire alors géométriquement s_a .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1071]

Exercice 34 ★★ Barycentre de deux isométries est une isométrie –

Soit E un espace euclidien et $u, v \in O(E)$.

1. Démontrer que si $x \in E$ est tel que $u(x) \neq v(x)$, alors $\langle u(x), v(x) \rangle < \|u(x)\| \cdot \|v(x)\|$.

2. On suppose qu'il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que $\lambda u + (1 - \lambda)v \in O(E)$. Démontrer que $u = v$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3311]

Exercice 35 ★★★★★ Endomorphisme orthogonal sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ –

Pour $n \geq 2$, on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle M, N \rangle = \text{Tr}(M^T N)$. Déterminer les réels a et b de sorte que $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M \mapsto aM + bM^T$ soit orthogonal.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3313]

Exercice 36 ★★★★★ Composée d'une homothétie et d'un endomorphisme orthogonal –

Soit E un espace vectoriel euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $x, y \in E$,

$$\langle x, y \rangle = 0 \implies \langle u(x), u(y) \rangle = 0.$$

1. Démontrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = k\|x\|$ (on pourra considérer une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) de E et les vecteurs $e_1 + e_i, e_1 - e_i$).

2. En déduire que u est la composée d'une homothétie et d'un endomorphisme orthogonal.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2522]

Exercice 37 ★★★★★ Endomorphismes orthogonaux et orthogonal d'un sous-espace vectoriel –

Soit E un espace vectoriel euclidien, soit $u \in \mathcal{O}(E)$ et soit F un sous-espace vectoriel de E .

1. Démontrer que $u(F^\perp) = [u(F)]^\perp$.

2. On dit que F est stable par u si $u(F) \subset F$. Démontrer que F est stable par u si et seulement si F^\perp est stable par u .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1066]

Exercice 38 ★★☆☆ Si on enlève la linéarité.... –

Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $f : E \rightarrow E$ une application telle que

$$\forall x, y \in E, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

1. Démontrer que l'image d'une base orthonormale de E par f est une base orthonormale.

2. En déduire que f est linéaire.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1068]

Exercice 39 ★★☆☆ Somme et projection orthogonale –

Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $u \in O(E)$. On pose $v = u - Id$.

1. Démontrer que $\ker(v) = (\operatorname{Im} v)^\perp$. En déduire que $\ker(v)^\perp = \operatorname{Im}(v)$.

2. Soit

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k.$$

Démontrer que pour tout $x \in E$, $(u_n(x))$ converge vers le projeté orthogonal de x sur $\ker v$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1069]

Exercice 40 ★★☆☆ Le groupe orthogonal est engendré par les réflexions –

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension non nulle. On rappelle qu'un endomorphisme de u admet toujours ou une droite stable, ou un plan stable. On souhaite prouver que $O(E)$ est engendré par les réflexions :

1. Démontrer le résultat si $\dim(E) \in \{1, 2\}$.

2. Démontrer le résultat dans le cas général.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3312]

5 Réduction des matrices orthogonales

Exercice 41 ★★☆☆ Endomorphisme orthogonal diagonalisable –

Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $u \in \mathcal{O}(E)$ diagonalisable. Démontrer que u est une symétrie.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1067]

Exercice 42 ★★☆☆ En dimension 4 –

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 4 et soit $u \in O(E)$ tel que $u^2 = -Id_E$. Démontrer qu'il existe une base orthonormée de E telle que la matrice de u dans cette base soit

$$\begin{pmatrix} R(\pi/2) & 0 \\ 0 & R(\pi/2) \end{pmatrix} \text{ avec } R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3314]

Exercice 43 ★★☆☆ Echange de deux vecteurs –

Soit E un plan vectoriel euclidien orienté, et soient u et v deux vecteurs unitaires de E . Déterminer les automorphismes orthogonaux qui envoient u sur v .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1063]

Exercice 44 ★★ Orthogonale et symétrique –

On considère la matrice $M = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$. Vérifier que M est une matrice orthogonale et symétrique.

Sans calculer son polynôme caractéristique, justifier que M est diagonalisable, déterminer ses valeurs propres avec multiplicité, et calculer son polynôme minimal.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2198]

Exercice 45 ★★★ Réduction d'un élément de $SO_3(\mathbb{R})$ –

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que $A \in SO_3(\mathbb{R})$.
2. Déterminer un vecteur unitaire e_1 tel que $Ae_1 = e_1$.
3. Déterminer une base orthonormale (e_2, e_3) de $\text{vect}(e_1)^\perp$.
4. Expliciter $P \in O_3(\mathbb{R})$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} P^{-1}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3316]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Considérer un bon produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et utiliser le théorème de représentation de Riesz.

Indication pour l'exercice 2 ▲

Revenir à la définition et utiliser la bilinéarité du produit scalaire.

Indication pour l'exercice 3 ▲

Revenir à la définition

Indication pour l'exercice 4 ▲

1. Une inclusion est évidente. Pour l'inclusion réciproque, calculer $\|u(x)\|^2$.
 2. Une inclusion est évidente, et l'autre peut se démontrer par un argument de dimension.
-

Indication pour l'exercice 5 ▲

Utiliser le théorème de Bézout !

Indication pour l'exercice 6 ▲

1. Démontrer que $(f^*)^2 = f^*$ en utilisant les produits scalaires.
 2. Que vaut $(\text{Im}(f))^\perp$.
 - 3.
 4. Faire la synthèse des deux questions précédentes.
-

Indication pour l'exercice 7 ▲

Déterminer quelles peuvent être les valeurs propres de S .

Indication pour l'exercice 8 ▲

Réduire comme on le fait d'ordinaire, mais pour chaque sous-espace propre, trouver une base orthonormale.

Indication pour l'exercice 9 ▲

Quelles sont les valeurs propres possibles de u ?

Indication pour l'exercice 10 ▲

Quelles sont les valeurs propres de A ?

Indication pour l'exercice 11 ▲

Est-ce que 0 est valeur propre de $A + iI_n$?

Indication pour l'exercice 12 ▲

Calculer les normes dans une base orthonormée de vecteurs propres.

Indication pour l'exercice 13 ▲

Pour 1. \implies 2., calculer les produits scalaires dans une base orthonormée de vecteurs propres de f . Pour 2 \implies 1., fixer un vecteur propre associé à λ , et étudier ce que signifie sur λ l'inégalité 2.

Indication pour l'exercice 14 ▲

1. Calculer les normes dans une base orthonormée de vecteurs propres de u .
 2. Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à h .
-

Indication pour l'exercice 15 ▲

Prendre une base orthonormale de vecteurs propres, et calculer les normes à l'aide des décompositions dans cette base.

Indication pour l'exercice 16 ▲

Penser par exemple en termes de valeurs propres.

Indication pour l'exercice 17 ▲

1. Écrire que

$$\|u(e_i)\|^2 = \sum_{k=1}^n |\langle u(e_i), e_k \rangle|^2.$$

2. C'est contenu dans la question précédente.
 3. On note u l'endomorphisme canoniquement associé à A dans la base canonique de \mathbb{R}^n . Calculer de deux façons différentes $\sum_{i=1}^n \|u(e_i)\|^2$.
-

Indication pour l'exercice 18 ▲

Si X est un vecteur propre, simplifier l'écriture de $X^T A^T A X$.

Indication pour l'exercice 19 ▲

- 1.
 2. Raisonner par récurrence sur la dimension.
-

Indication pour l'exercice 20 ▲

1. Quelles peuvent être les valeurs propres de v ?
 2. Utiliser la question précédente. Une fois n'est pas coutume, montrer que l'on a d'abord une somme, puis prouver que c'est une somme directe. Calculer $u_k(x)$ à l'aide de 1.a).
 3. Utiliser la question précédente.
 4. Une fois n'est pas coutume, montrer que l'on a d'abord une somme, puis prouver que c'est une somme directe.
 5. Calculer $u_k(x)$ à l'aide de 1.a).
-

Indication pour l'exercice 21 ▲

1. Utiliser la base orthonormale et commencer par prouver que $R_A(x) \in [\lambda_1, \lambda_n]$.
 2. $x = e_k$.
 3. Dimension + $R_A(x) \geq \lambda_k$ pour tout $x \in W_k$ (toujours grâce à la base orthonormale).
 - 4.
-

Indication pour l'exercice 22 ▲

Calculer $\langle AX, X \rangle$ pour tout $X \in \mathbb{R}^2$.

Indication pour l'exercice 23 ▲

Quelles sont les valeurs propres de $I_n + A$?

Indication pour l'exercice 24 ▲

Il y a deux méthodes possibles : revenir à la définition en étudiant quelles conditions font que $\langle AX, X \rangle > 0$ pour $X \neq 0$, ou calculer les valeurs propres de A .

Indication pour l'exercice 25 ▲

Revenir à la définition d'une relation d'ordre : réflexivité, antisymétrie, transitivité. On pourra utiliser qu'une matrice diagonalisable dont le spectre est égal à $\{0\}$ est égale à la matrice nulle.

Indication pour l'exercice 26 ▲

1. Calculer $(u(x), x)$ dans une base orthonormale de vecteurs propres.
 2. Décomposer E en somme directe des espaces propres de u .
 3. Remplacer u par w^2 . Que peut-on dire des images et noyaux de deux endomorphismes qui commutent ?
 - w_i est symétrique. Quelles peuvent-être les valeurs propres de w ? Recoller !
 4. Remplacer u par w^2 .
 5. Que peut-on dire des images et noyaux de deux endomorphismes qui commutent ?
 6. w_i est symétrique. Quelles peuvent-être les valeurs propres de w ?
 7. Recoller !
 8. Appliquer la définition ! Prendre pour g l'unique élément de $S^+(E)$ tel que $g^2 = f^* \circ f$. Puis définir h de l'unique façon possible. Vérifier que $h \in O(E)$.
 9. Appliquer la définition !
 10. Prendre pour g l'unique élément de $S^+(E)$ tel que $g^2 = f^* \circ f$. Puis définir h de l'unique façon possible. Vérifier que $h \in O(E)$.
-

Indication pour l'exercice 27 ▲

Commencer par les matrices de taille 2, de taille 3....

Indication pour l'exercice 28 ▲

1. Les colonnes forment une famille orthonormale.
 2. Calculer en plus le déterminant, sous forme factorisée.
-

Indication pour l'exercice 29 ▲

Combien chaque colonne admet-elle de coefficients non nuls ?

Indication pour l'exercice 30 ▲

1. Écrire $m_{i,j}$ comme un produit scalaire.
2. Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
3. Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur la somme sur i .
4. Démontrer que

$$\sum_{i=1}^n |m_{i,j}| \geq \left(\sum_{i=1}^n m_{i,j}^2 \right)^{1/2}.$$

Indication pour l'exercice 31 ▲

1. Le résultat est dans la question suivante !
 2. Interpréter la matrice A comme la matrice de passage de la base canonique à une base \mathcal{B} , puis s'inspirer de la question précédente.
 3. Commencer par démontrer qu'une matrice orthogonale qui est aussi triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs est égale à l'identité.
-

Indication pour l'exercice 32 ▲

Revenir à la définition d'une symétrie, puis d'un endomorphisme orthogonal.

Indication pour l'exercice 33 ▲

Calculer $\|s_a(x)\|$, puis démontrer que s_a est une symétrie orthogonale.

Indication pour l'exercice 34 ▲

-
1. Cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwartz.
 2. Procéder par contraposée, et calculer $\|\lambda u(x) + (1 - \lambda)v(x)\|^2$ pour un x bien choisi.
-

Indication pour l'exercice 35 ▲

Faire un raisonnement par analyse/synthèse : si f est orthogonale, $\|f(M)\| = \|M\|$ pour toute matrice M . Calculer et faire des simplifications, puis essayer avec des matrices simples pour obtenir des conditions nécessaires.

Indication pour l'exercice 36 ▲

-
1. Démontrer que $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une famille orthogonale de E avec $\|u(e_i)\| = \|u(e_1)\|$. Calculer la norme de $u(x)$ à l'aide de cette base.
 2. Considérer $v = \frac{1}{k}u$.
-

Indication pour l'exercice 37 ▲

-
1. Il suffit de prouver une inclusion, puis de raisonner avec les dimensions.
 2. Remarquer d'abord que si F est stable par u , on a en réalité $u(F) = F$.
-

Indication pour l'exercice 38 ▲

-
- 1.
 2. Montrer que si $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, alors

$$f(x) = x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n).$$

Indication pour l'exercice 39 ▲

-
1. Démontrer l'inclusion \subset puis utiliser l'égalité des dimensions.
 2. Écrire $x = a + b$ avec $a \in \ker(v)$ et $b \in \ker(v)^\perp$, et calculer $u_n(a)$ et $u_n(b)$. Pour ce dernier calcul, on utilisera la question précédente.
-

Indication pour l'exercice 40 ▲

-
1. Si $\dim(E) = 2$, utiliser que si $u \in O(E) \setminus SO(E)$, alors u est une réflexion.
 2. Procéder par récurrence. On pourra utiliser que si F est stable par u , alors F^\perp est aussi stable par u .
-

Indication pour l'exercice 41 ▲

Quelles peuvent être les valeurs propres de u ?

Indication pour l'exercice 42 ▲

u admet-elle des valeurs propres ? Utiliser le théorème de réduction, et éventuellement permuter des vecteurs !

Indication pour l'exercice 43 ▲

Il suffit de déterminer les rotations et les symétries qui envoient u sur v .

Indication pour l'exercice 44 ▲

Quelles peuvent être les valeurs propres d'une matrice orthogonale et symétrique ?

Indication pour l'exercice 45 ▲

- 1.
 - 2.
 3. Commencer par chercher une base, puis orthonormaliser la !
 4. Quelle est la matrice de A dans la base (e_1, e_2, e_3) ?
-

Correction de l'exercice 1 ▲

On rappelle que $\langle M, N \rangle = \text{Tr}(M^T N)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors, par le théorème de représentation de Riesz, il existe une unique matrice B telle que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\varphi(M) = \langle B, M \rangle = \text{Tr}(B^T M).$$

La matrice $A = B^T$ convient, et par unicité de B (et puisque $M \mapsto M^T$ est injective), la matrice A est aussi unique.

Correction de l'exercice 2 ▲

Soit $x, y \in E$. On va déterminer l'adjoint f^* en revenant à la définition :

$$\begin{aligned}\langle f(x), y \rangle &= \langle \langle a, x \rangle b - \langle b, x \rangle a, y \rangle \\ &= \langle a, x \rangle \langle b, y \rangle - \langle b, x \rangle \langle a, y \rangle \\ &= \langle x, a \rangle \langle b, y \rangle - \langle x, b \rangle \langle a, y \rangle \\ &= \langle x, \langle b, y \rangle a - \langle a, y \rangle b \rangle.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$f^*(y) = \langle b, y \rangle a - \langle a, y \rangle b = -f(y).$$

Correction de l'exercice 3 ▲

On va revenir à la définition de l'adjoint. Pour tous $M, N \in E$,

$$\langle R_A(M), N \rangle = \text{Tr}((MA)^T N) = \text{Tr}(A^T M^T N) = \text{Tr}(M^T N A^T) = \langle M, N A^T \rangle$$

ce qui prouve que $R_A^* = R_{A^T}$. De la même façon, on prouve que $L_A^* = L_{A^T}$.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. D'une part, si $u(x) = 0$, il est clair que $u^* \circ u(x) = 0$ et donc $\ker(u) \subset \ker(u^* \circ u)$. Réciproquement, si $u^* \circ u(x) = 0$, alors on a

$$\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x) \rangle = \langle u^* \circ u(x), x \rangle = \langle 0, x \rangle = 0.$$

Ainsi, $u(x) = 0$ et on a $\ker(u^* \circ u) \subset \ker(u)$.

2. Il est clair que $\text{Im}(u^* \circ u) \subset \text{Im}(u^*)$. On va prouver qu'on a égalité par un raisonnement de dimension. D'une part,

$$\text{Im}(u^*) = (\ker(u))^\perp$$

et donc

$$\dim(\text{Im}(u^*)) = \dim(E) - \dim(\ker(u)).$$

D'autre part, $(u^* \circ u)^* = u^* \circ u$ et donc

$$\dim(\text{Im}(u^* \circ u)) = \dim(E) - \dim(\ker(u^* \circ u)) = \dim(E) - \dim(\ker(u))$$

d'après la question précédente. Puisque $\text{Im}(u^* \circ u) \subset \text{Im}(u^*)$ et que ces sous-espaces ont la même dimension, on en déduit qu'ils sont égaux.

Correction de l'exercice 5 ▲

Puisque P et Q sont premiers entre eux, il existe deux polynômes $U, V \in \mathbb{R}[X]$ tels que $UP + VQ = 1$. On a donc, en considérant les polynômes d'endomorphismes associés,

$$U(f) \circ P(f) + V(f) \circ Q(f) = \text{Id}.$$

Considérons ensuite $x \in \ker(P(f))$. Alors $P(f)(x) = 0$ et donc $x = V(f) \circ Q(f)(x) = Q(f) \circ V(f)(x)$. Soit maintenant $y \in \ker(Q(f^*))$. Alors

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle &= \langle Q(f) \circ V(f)(x), y \rangle \\ &= \langle V(f)(x), (Q(f))^*(y) \rangle \\ &= \langle V(f)(x), Q(f^*)(y) \rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $\ker(P(f)) \perp \ker(Q(f^*))$.

Correction de l'exercice 6 ▲

1. Soient $x, y \in E$. Alors on a

$$\langle f^*(f^*(x)), y \rangle = \langle x, f(f(y)) \rangle = \langle x, f(y) \rangle = \langle f^*(x), y \rangle.$$

Ainsi, $f^*(f^*(x)) = f^*(x)$, et donc f^* est bien un projecteur. On aurait pu aussi passer à l'adjoint dans la relation $f^2 = f$.

2. On sait que $(\operatorname{Im}(f))^\perp = \ker(f^*)$. Ainsi, si $f = f^*$, alors $\ker(f) = \operatorname{Im}(f)^\perp$, et f est bien projection orthogonale sur $\operatorname{Im}(f)$. Réciproquement si f est la projection orthogonale sur $\operatorname{Im}(f)$, alors f^* est un projecteur sur $\operatorname{Im}(f^*) = \ker(f)^\perp = \operatorname{Im}(f)$, parallèlement à $\ker(f^*) = \operatorname{Im}(f)^\perp = \ker(f)$. f^* étant un projecteur ayant les mêmes éléments caractéristiques que f , on a bien $f = f^*$.

3. Le fait que $f \circ f^*$ est une projection orthogonale suit d'un simple calcul algébrique :

$$(f \circ f^*)^2 = f \circ f^* \circ f \circ f^* = (f \circ f) \circ (f^* \circ f^*) = f \circ f^*.$$

De plus, c'est une projection orthogonale d'après la question précédente, car

$$(f \circ f^*)^* = f \circ f^*.$$

Soit $x \in \ker(f \circ f^*) \cap \operatorname{Im}(f)$, et écrivons $x = f(y)$. Alors,

$$0 = f(f^*(x)) = f^*(f(f(y))) = f^*(f(y)) = f^*(x).$$

Ainsi, $x \in \ker(f^*) = \operatorname{Im}(f)^\perp$, et donc $x = 0$. Prenons d'abord $x \in \ker(f)$. Alors

$$f(f^*(x)) = f^*(f(x)) = 0,$$

et donc $\ker(f) \subset \ker(f \circ f^*)$. Réciproquement, prenons $x \in \ker(f \circ f^*)$. Alors $x = u + v$, avec $u \in \ker(f)$ et $v \in \operatorname{Im}(f)$. Il suffit de démontrer que $v = 0$. Mais il est facile de vérifier que $f(f^*(v)) = 0$ (car cette même relation est aussi satisfaite pour x et u), et donc d'après la question précédente, $v = 0$. Pour l'égalité concernant les images, on peut remarquer que $\operatorname{Im}(f \circ f^*) \subset \operatorname{Im}(f)$, et conclure en utilisant un argument de dimension.

4. Le fait que $f \circ f^*$ est une projection orthogonale suit d'un simple calcul algébrique :

$$(f \circ f^*)^2 = f \circ f^* \circ f \circ f^* = (f \circ f) \circ (f^* \circ f^*) = f \circ f^*.$$

De plus, c'est une projection orthogonale d'après la question précédente, car

$$(f \circ f^*)^* = f \circ f^*.$$

5. Soit $x \in \ker(f \circ f^*) \cap \operatorname{Im}(f)$, et écrivons $x = f(y)$. Alors,

$$0 = f(f^*(x)) = f^*(f(f(y))) = f^*(f(y)) = f^*(x).$$

Ainsi, $x \in \ker(f^*) = \operatorname{Im}(f)^\perp$, et donc $x = 0$.

6. Prenons d'abord $x \in \ker(f)$. Alors

$$f(f^*(x)) = f^*(f(x)) = 0,$$

et donc $\ker(f) \subset \ker(f \circ f^*)$. Réciproquement, prenons $x \in \ker(f \circ f^*)$. Alors $x = u + v$, avec $u \in \ker(f)$ et $v \in \operatorname{Im}(f)$. Il suffit de démontrer que $v = 0$. Mais il est facile de vérifier que $f(f^*(v)) = 0$ (car cette même relation est aussi satisfaite pour x et u), et donc d'après la question précédente, $v = 0$. Pour l'égalité concernant les images, on peut remarquer que $\operatorname{Im}(f \circ f^*) \subset \operatorname{Im}(f)$, et conclure en utilisant un argument de dimension.

7. Si f et f^* commutent, alors f est une projection sur $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f \circ f^*)$ parallèlement à $\ker(f) = \ker(f \circ f^*)$. C'est donc une projection orthogonale, et ceci garantit que $f = f^*$.

Correction de l'exercice 7 ▲

Le polynôme $P = X^4 - 2X^3 + 3X^2$ est un polynôme annulateur pour S . Il se factorise en $P = X^2(X^2 - 2X + 3)$. Or, le discriminant de $X^2 - 2X + 3$ est $-8 < 0$, et donc la seule racine de P est 0. Comme les valeurs propres des matrices sont toujours des racines des polynômes annulateurs, la seule valeur propre possible pour S est 0. Mais d'autre part, S est diagonalisable (dans une base orthonormée), et donc il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $S = PDP^T$ avec D diagonale constituée par les valeurs propres de A , c'est-à-dire $D = 0$. Ainsi, $S = 0$.

Correction de l'exercice 8 ▲

La matrice A est symétrique réelle, elle est donc diagonalisable. Le calcul du polynôme caractéristique donne $\chi_A(X) = X^3 - 3X^2 - 9X + 27$. Ses racines sont -3 (racine simple) et 3 (racine double). Cherchons d'abord le sous-espace propre associé à 3 . La résolution de l'équation $AX = 3X$ montre que l'espace propre associé est le plan vectoriel $x + y + z = 0$. Une base de cet espace est donnée par les vecteurs $(1, -1, 0)$ et $(1, 0, -1)$. L'orthonormalisation de cette base donne la base orthonormalisée $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$, $(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6})$. Pour l'espace propre associé à -3 , il y a possibilité d'aller plus vite. Comme on a affaire à une matrice symétrique, les espaces propres sont orthogonaux. Ici, l'espace propre associé à -3 ne peut-être que l'orthogonal du plan $x + y + z = 0$. Un vecteur normal à ce plan étant le vecteur $(1, 1, 1)$, une base orthonormée de l'espace propre associée à -3 est le vecteur $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$. Finalement, on trouve qu'une matrice P qui convient est :

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 9 ▲

Soit λ une valeur propre de u , et x un vecteur propre associé. Alors on a d'une part

$$\langle u(x), x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda \|x\|^2$$

et d'autre part, par hypothèse,

$$\langle u(x), x \rangle = 0.$$

Toutes les valeurs propres de u sont donc nulles. Comme u est diagonalisable, on en déduit que $u = 0$.

Correction de l'exercice 10 ▲

Soit λ une valeur propre de A , et X un vecteur propre associé. Alors on a $A^p X = \lambda^p X$ mais aussi $A^p X = 0$. Ainsi, on doit avoir $\lambda^p = 0$, soit encore $\lambda = 0$. Ainsi, toutes les valeurs propres de A doivent être nulles. Mais comme A est diagonalisable, il est clair que ceci entraîne que $A = 0$. Réciproquement, la matrice nulle vérifie bien ceci !

Correction de l'exercice 11 ▲

Il suffit de prouver que 0 n'est pas une valeur propre de $A + iI_n$. Mais A étant une matrice symétrique réelle, elle est diagonalisable sur \mathbb{R} et admet donc uniquement des valeurs propres réelles, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (éventuellement répétées plusieurs fois si la valeur propre est multiple). Donc les valeurs propres de $A + iI_n$ sont $\lambda_1 + i, \dots, \lambda_n + i$. Ainsi, 0 n'est pas valeur propre de $A + iI_n$ et cette matrice est inversible.

Correction de l'exercice 12 ▲

Soit (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée de vecteurs propres associée aux valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Écrivons $x \in E$ sous la forme $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, de sorte que

$$u(x) = \lambda_1 x_1 e_1 + \dots + \lambda_n x_n e_n.$$

Alors on a

$$\|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$$

et

$$\langle u(x), x \rangle = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2.$$

Puisque, pour tout $i = 1, \dots, n$, on a $\lambda_1 \leq \lambda_i \leq \lambda_n$, on a donc

$$\lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle u(x), x \rangle \leq \lambda_n \|x\|^2.$$

Correction de l'exercice 13 ▲

1. \implies 2. Puisque $f \in \mathcal{S}(E)$, il existe une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) de E constituée de vecteurs propres pour u : pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $u(e_i) = \lambda_i e_i$ avec $\lambda_i \in [a, b]$. Soit maintenant $x \in E$. Alors x s'écrit $\sum_{i=1}^n x_i e_i$, et on a :

$$\begin{aligned} \langle u(x) - ax, u(x) - bx \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n (\lambda_i - a) x_i e_i, \sum_{j=1}^n (\lambda_j - b) x_j e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n (\lambda_i - a)(\lambda_i - b) x_i^2 \end{aligned}$$

où la dernière ligne vient du fait que (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormée. Puisque $(\lambda_i - a)(\lambda_i - b) x_i^2 \leq 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$, on obtient bien $\langle u(x) - ax, u(x) - bx \rangle \leq 0$. 2. \implies 1. Soit λ une valeur propre de E et $x \in E$, $x \neq 0$, tel que $u(x) = \lambda x$. Alors on a

$$\langle u(x) - ax, u(x) - bx \rangle = (\lambda - a)(\lambda - b) \|x\|^2.$$

Ainsi, puisque $x \neq 0$, on doit avoir $(\lambda - a)(\lambda - b) \leq 0$, ce qui revient exactement à dire que $\lambda \in [a, b]$.

Correction de l'exercice 14 ▲

1. Soit (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée de vecteurs propres associée aux valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Écrivons $x \in E$ sous la forme $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, de sorte que

$$u(x) = \lambda_1 x_1 e_1 + \dots + \lambda_n x_n e_n.$$

Alors on a

$$\|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$$

et

$$\langle u(x), x \rangle = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2.$$

Puisque, pour tout $i = 1, \dots, n$, on a $m \leq \lambda_i \leq M$, on a donc

$$m \|x\|^2 \leq \langle u(x), x \rangle \leq M \|x\|^2.$$

On en déduit que si $1 \in W(u)$, alors $1 \in [m, M]$.

2. On a $h(0) = \langle u(e), e \rangle = m$ et $h(\pi/2) = \langle u(f), f \rangle = M$. Supposons désormais que $1 \in [m, M]$. Si $m = M$, alors $1 = m = M \in W(u)$. Sinon, la fonction h étant continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\theta \in [0, \pi/2]$ tel que $h(\theta) = 1$. Mais alors, on sait que (puisque e et f sont orthogonaux car ce sont deux

vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes) $\|g(\theta)\| = 1$, et donc $1 \in W(u)$. On a donc prouvé la réciproque de la première question.

Correction de l'exercice 15 ▲

Soit (e_1, \dots, e_n) une base orthonormale de E constituée de vecteurs propres pour f . Notons $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les valeurs propres associées. Pour $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on a $f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i$, et donc

$$\|f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 x_i^2 \leq \rho(f)^2 \|x\|^2,$$

ce qui prouve que $\|f\| \leq \rho(f)$. D'autre part, il existe k tel que $\rho(f) = |\lambda_k|$. On a alors $\|f(e_k)\| = |\lambda_k| = \rho(f)$, et comme $\|e_k\| = 1$, on a $\rho(f) \leq \|f\|$.

Correction de l'exercice 16 ▲

Soit u un tel endomorphisme, et soit λ une valeur propre de u . Si x est un vecteur propre associé, on a $\|u(x)\| = \|x\|$ et $\|u(x)\| = |\lambda| \|x\|$. On en déduit que $\lambda = \pm 1$. On a donc $\ker(u - Id) \oplus \ker(u + Id) = E$ et donc u est une symétrie orthogonale. Réciproquement, toute symétrie orthogonale est un endomorphisme symétrique et orthogonal.

Correction de l'exercice 17 ▲

1. On écrit

$$\|u(e_i)\|^2 = \sum_{k=1}^n |\langle u(e_i), f_k \rangle|^2,$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \|u(e_i)\|^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |\langle u(e_i), f_k \rangle|^2 \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n |\langle e_i, u^*(f_k) \rangle|^2 \\ &= \sum_{k=1}^n \|u^*(f_k)\|^2. \end{aligned}$$

2. Si (e_i) et (e'_i) sont deux bases orthonormées, alors on aura toujours, (f_i) désignant une base orthonormée fixe

$$\sum_{i=1}^n \|u(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^n \|u(e'_i)\|^2 = \sum_{k=1}^n \|u^*(f_k)\|^2.$$

La quantité est donc indépendante de la base orthonormée choisie.

3. Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A dans la base canonique (e_1, \dots, e_n) de \mathbb{R}^n . Par un calcul direct, on a aussi

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$$

de sorte que

$$\|u(e_1)\|^2 + \dots + \|u(e_n)\|^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2.$$

Mais, u est un endomorphisme symétrique, il est diagonalisable dans une base orthonormée (f_1, \dots, f_n) telle que $u(f_i) = \lambda_i f_i$. On a alors

$$\|u(f_1)\|^2 + \dots + \|u(f_n)\|^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2.$$

D'après le résultat de la question précédente, ces deux quantités sont égales !

Correction de l'exercice 18 ▲

On remarque d'abord que la matrice $A^T A$ est symétrique. Elle est donc diagonalisable à valeurs propres réelles. De plus, si X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ , alors on a

$$A^T A X = \lambda X \implies X^T A^T A X = \lambda X^T X \implies (A X)^T A X = \lambda X^T X \implies \|A X\|^2 = \lambda \|X\|^2.$$

Ainsi, λ , quotient de deux réels positifs, est un réel positif.

Correction de l'exercice 19 ▲

1. Le fait que F est stable par v ne dépend pas du fait que u et v sont symétriques. En effet, dès que u et v commutent, si $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $\ker P(u)$ est stable par v . Reprouvons ce fait dans ce cas particulier. Soit $x \in F$, de sorte que $u(x) = \lambda x$. Alors

$$u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$$

de sorte que $v(x) \in F$ et que F est stable par v . Prenons ensuite $y \in F^\perp$, et prouvons que $v(y) \in F^\perp$. On veut prouver que, pour tout $x \in F$, on a

$$\langle v(y), x \rangle = 0.$$

Mais puisque v est symétrique, ceci est égal à

$$\langle y, v(x) \rangle = 0$$

puisque $v(x) \in F$. Ainsi, F^\perp est aussi stable par v .

2. On va raisonner par récurrence forte sur la dimension de l'espace. Le résultat demandé est vrai en dimension 1. Supposons qu'il soit vrai pour toute dimension inférieure ou égale à $n-1$, et prouvons-le en dimension n . Puisque u est symétrique, u admet une valeur propre λ et notons F le sous-espace propre associé. F est stable par v . Notons v_0 la restriction de v à F . C'est un endomorphisme symétrique, et donc il existe une base orthonormale (e_1, \dots, e_p) de F diagonalisant v_0 . Puisque on travaille dans F , on a aussi $u(e_i) = \lambda e_i$. Remarquons ensuite que F^\perp est stable par u et par v . Notons u_1 et v_1 les restrictions respectives de u et v à F^\perp . u_1 et v_1 commutent, et $\dim(F^\perp) < n$. Ainsi, il existe une base orthonormale (f_1, \dots, f_q) diagonalisant simultanément u_1 et v_1 . La base $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q)$ est alors une base orthonormale de E diagonalisant simultanément u et v .

Correction de l'exercice 20 ▲

1. Soit λ une valeur propre de v . Alors on a $0 = (v(x), x) = \lambda \|x\|^2$, et donc $\lambda = 0$. Puisque v est diagonalisable, et que toutes ses valeurs propres sont nulles, on en déduit que $v = 0$.

2. En utilisant la linéarité, ceci se traduit par

$$\forall x \in E, (u_1(x) + \dots + u_p(x) - Id_E(x), x) = 0.$$

Puisque $u_1 + \dots + u_p - Id_E$ est symétrique, on en déduit $u_1 + \dots + u_p = Id_E$. La relation précédente montre que tout x de E se décompose en $x = u_1(x) + \dots + u_p(x)$. Ainsi, on a $E = Im(u_1) + \dots + Im(u_p)$. D'autre part, la relation sur les rangs entraîne automatiquement que la somme est directe ! (on utilise le fait que F et G sont en somme directe si et seulement si $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G)$). Puisque $Id_E = u_1 + \dots + u_p$, on a, pour tout $x \in E$ et tout k :

$$u_k(x) = u_1 \circ u_k(x) + \dots + u_p \circ u_k(x).$$

Par l'unicité de la décomposition due à la somme directe, on en déduit que $u_i \circ u_k = 0$ si $i \neq k$, et $u_k^2 = u_k$. Ainsi, u_k est bien une projection sur $Im(u_k)$. Puisqu'en outre l'endomorphisme est symétrique, c'est la projection orthogonale sur $Im(u_k)$!

3. En utilisant la linéarité, ceci se traduit par

$$\forall x \in E, (u_1(x) + \dots + u_p(x) - Id_E(x), x) = 0.$$

Puisque $u_1 + \dots + u_p - Id_E$ est symétrique, on en déduit $u_1 + \dots + u_p = Id_E$.

4. La relation précédente montre que tout x de E se décompose en $x = u_1(x) + \dots + u_p(x)$. Ainsi, on a $E = Im(u_1) + \dots + Im(u_p)$. D'autre part, la relation sur les rangs entraîne automatiquement que la somme est directe ! (on utilise le fait que F et G sont en somme directe si et seulement si $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G)$).

5. Puisque $Id_E = u_1 + \dots + u_p$, on a, pour tout $x \in E$ et tout k :

$$u_k(x) = u_1 \circ u_k(x) + \dots + u_p \circ u_k(x).$$

Par l'unicité de la décomposition due à la somme directe, on en déduit que $u_i \circ u_k = 0$ si $i \neq k$, et $u_k^2 = u_k$. Ainsi, u_k est bien une projection sur $Im(u_k)$. Puisqu'en outre l'endomorphisme est symétrique, c'est la projection orthogonale sur $Im(u_k)$!

Correction de l'exercice 21 ▲

1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ non nul qu'on décompose dans la base orthonormale $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$, $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. On a donc

$$Ax = \lambda_1 x_1 e_1 + \dots + \lambda_n x_n e_n.$$

Il vient

$$\langle Ax, x \rangle = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$$

soit, en utilisant $\lambda_1 \leq \lambda_i \leq \lambda_n$,

$$\lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle Ax, x \rangle \leq \lambda_n \|x\|^2.$$

On en déduit que $R_A(x) \in [\lambda_1, \lambda_n]$. De plus, $R_A(e_1) = \lambda_1$ et $R_A(e_n) = \lambda_n$. Ceci prouve le résultat demandé.

2. Pour $x = e_k \in V_k$, on a $R_A(x) = \lambda_k$, d'où le résultat voulu.

3. Si $V \cap W_k$ était réduit à $\{0\}$, on aurait $\dim(V + W_k) = \dim(V) + \dim(W_k) = k + (n - k + 1) = n + 1 > n$, une contradiction. Maintenant, pour tout $x \in W_k$, $x \neq 0$, on a $R_A(x) \geq \lambda_k$. Ceci se prouve exactement comme à la question 1., en écrivant $x = x_k e_k + \dots + x_n e_n$, et en remarquant que $\lambda_i \geq \lambda_k$ pour $i \in \{k, \dots, n\}$. D'autre part, il est clair que $V \setminus \{0\}$ contient $V \cap W_k \setminus \{0\}$, d'où le résultat voulu.

4. La question 2 nous dit que

$$\min_{V \in \mathcal{F}_k} \max_{x \in V \setminus \{0\}} R_A(x) \leq \max_{x \in V_k \setminus \{0\}} R_A(x) \leq \lambda_k.$$

D'autre part, la question 3 nous dit que, pour tout $V \in \mathcal{F}_k$, on a

$$\max_{x \in V \setminus \{0\}} R_A(x) \geq \lambda_k.$$

D'où le théorème de Courant-Fischer.

Correction de l'exercice 22 ▲

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Alors $AX = \begin{pmatrix} 2x - y \\ -x + y \end{pmatrix}$ de sorte que

$$\langle AX, X \rangle = 2x^2 - xy - xy + y^2 = (x - y)^2 + x^2.$$

Cette dernière quantité est toujours positive ou nulle, donc $A \in \mathcal{S}_2^+(\mathbb{R})$, et de plus elle est nulle si et seulement si $x = y = 0$. Donc $A \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$. Concernant B , un calcul similaire donne

$$\langle BX, X \rangle = x^2 + 4xy + y^2 = (x + y)^2 + 2xy.$$

En particulier, si $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, alors $\langle BX, X \rangle = -2 < 0$. Donc B n'est pas une matrice symétrique positive. Les deux résultats de l'exercice peuvent sembler étonnants. Ils illustrent le fait qu'être positif ne peut se décider uniquement en fonction du signe des coefficients de la matrice.

Correction de l'exercice 23 ▲

Puisque $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, A est diagonalisable dans une base orthonormale : il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle $A = PDP^{-1}$, avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. D'autre part, puisque A est positive, tous les valeurs propres λ_i sont éléments de $[0, +\infty[$. On écrit ensuite

$$I_n + A = PI_n P^{-1} + PDP^{-1} = P(I_n + D)P^{-1}$$

avec $I_n + D = \text{diag}(1 + \lambda_1, \dots, 1 + \lambda_n)$. On a enfin

$$\det(I_n + D) = \prod_{k=1}^n (1 + \lambda_k) \geq 1$$

puisque $1 + \lambda_k \geq 1$ pour tout $k = 1, \dots, n$.

Correction de l'exercice 24 ▲

Voici deux méthodes pour résoudre cet exercice : Méthode 1. $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si, pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq 0$, $\langle AX, X \rangle > 0$. On commence par calculer

$$\langle AX, X \rangle = rx^2 + 2sxy + ty^2.$$

On suppose que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Alors en choisissant $x = 1$ et $y = 0$, on obtient $r > 0$. On a aussi $t > 0$ en choisissant $x = 0$ et $y = 1$. On essaie alors d'écrire $\langle AX, X \rangle$ comme la somme de deux carrés. On s'inspire de la mise sous forme canonique d'un trinôme du second degré, et on trouve

$$\langle AX, X \rangle = r \left(x + \frac{sy}{r} \right)^2 + \frac{y^2}{r} (rt - s^2).$$

En choisissant $x = s/r$ et $y = -1$, on a

$$\langle AX, X \rangle = \frac{rt - s^2}{r} > 0,$$

ce qui entraîne $rt - s^2 > 0$. Réciproquement, si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, on a aussi $t > 0$ et l'écriture

$$\langle AX, X \rangle = r \left(x + \frac{sy}{r} \right)^2 + \frac{y^2}{r} (rt - s^2)$$

entraîne que $\langle AX, X \rangle \geq 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^2$. De plus, si $\langle AX, X \rangle = 0$, alors on a

$$\begin{cases} x + \frac{s}{r}y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff x = y = 0.$$

Ceci démontre que $A \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$. Méthode 2. Puisque A est clairement symétrique, on peut utiliser que $A \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives. Notons λ_1 et λ_2 ces deux valeurs propres (éventuellement, $\lambda_1 = \lambda_2$). Il est facile de voir que

$$\begin{cases} \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 \lambda_2 > 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 > 0 \end{cases}$$

Or, le polynôme caractéristique de A est

$$C_A(X) = x^2 - (r+t)x + (rt - s^2).$$

Par les relations coefficients/racines, $\lambda_1 \lambda_2 = rt - s^2$ et $\lambda_1 + \lambda_2 = r + t$. Ainsi,

$$A \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R}) \iff rt > s^2 \text{ et } r + t > 0.$$

Or, sous la condition $rt > 0$, on a $r + t > 0 \iff r > 0$. Ceci donne une deuxième démonstration de l'équivalence.

Correction de l'exercice 25 ▲

On vérifie que la relation \leq est réflexive, antisymétrique, transitive :

réflexive : puisque la matrice nulle est une matrice symétrique positive, on a bien $A \leq A$ pour tout $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. antisymétrique : soit $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $A \leq B$ et $B \leq A$. Alors $B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et donc son spectre est contenu dans \mathbb{R}_+ . De même, le spectre de $A - B$ est contenu dans \mathbb{R}_+ . Puisque $B - A = -(A - B)$,

on obtient que le spectre de $B - A$ est contenu dans $\{0\}$. Comme de plus $B - A$ est diagonalisable (c'est une matrice symétrique réelle!), on obtient que $B - A = 0$ soit $A = B$. transitive : soit $A, B, C \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $A \leq B$ et $B \leq C$. Alors pour tout $X \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle (C - A)X, X \rangle = \langle (C - B + B - A)X, X \rangle = \langle (C - B)X, X \rangle + \langle (B - A)X, X \rangle \geq 0.$$

Ainsi, $C - A$ est une matrice de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $A \leq C$.

Remarquons que pour résoudre cet exercice, on a utilisé les deux caractérisations d'une matrice symétrique positive.

Correction de l'exercice 26 ▲

1. Puisque u est symétrique, il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs propres, correspondant aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Prenant $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on a

$$(u(x), x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2.$$

Si toutes les valeurs propres sont positives, on en déduit que cette quantité est positive. D'autre part, s'il existe une valeur propre strictement négative, par exemple λ_1 , alors $(u(e_1), e_1) = \lambda_1 < 0$, et u n'est pas positif. Pour que u soit défini positif, il est nécessaire et suffisant que toutes les valeurs propres de u soient strictement positives. Le raisonnement est identique.

2. D'après le théorème spectral, les E_i sont en somme directe orthogonale. Ainsi, si $x \in E_i$, on a $v_j(x) = 0$ si $j \neq i$ et $v_i(x) = \sqrt{\lambda_i}x$. Ainsi, $v(x) = v_1(x) + \dots + v_n(x) = \sqrt{\lambda_i}x$, et $v^2(x) = \lambda_i x$. Puisque $E_1 \oplus \dots \oplus E_n = E$, la relation est vraie sur E tout entier par recollement. D'autre part, v est symétrique positif, car chacun des v_i est symétrique positif.

3. On a : $w \circ u = w \circ w^2 = w^3 = w^2 \circ w = u \circ w$. Il est bien connu que si deux endomorphismes commutent, le noyau de tout polynôme en l'un est stable par l'autre. En particulier, les sous-espaces propres de u sont stables par w . w_i est un endomorphisme symétrique positif, car c'est la restriction à un sous-espace stable d'un endomorphisme positif. w_i est donc diagonalisable dans une base orthonormale. En outre, si μ est une de ses valeurs propres, associée au vecteur propre y , on a $w(y) = \mu y \implies w^2(y) = \mu^2 y = \lambda_i y$. Il vient $\mu = \sqrt{\lambda_i}$, puisque μ est positif. Ainsi, $w_i = \sqrt{\lambda_i} Id_{E_i}$. Ainsi, w coïncide avec v sur chaque E_i , et puisque E est somme directe des E_i , $w = v$.

4. On a : $w \circ u = w \circ w^2 = w^3 = w^2 \circ w = u \circ w$.

5. Il est bien connu que si deux endomorphismes commutent, le noyau de tout polynôme en l'un est stable par l'autre. En particulier, les sous-espaces propres de u sont stables par w .

6. w_i est un endomorphisme symétrique positif, car c'est la restriction à un sous-espace stable d'un endomorphisme positif. w_i est donc diagonalisable dans une base orthonormale. En outre, si μ est une de ses valeurs propres, associée au vecteur propre y , on a $w(y) = \mu y \implies w^2(y) = \mu^2 y = \lambda_i y$. Il vient $\mu = \sqrt{\lambda_i}$, puisque μ est positif. Ainsi, $w_i = \sqrt{\lambda_i} Id_{E_i}$.

7. Ainsi, w coïncide avec v sur chaque E_i , et puisque E est somme directe des E_i , $w = v$.

8. On remarque d'abord que $f^* \circ f$ est symétrique. De plus, si $x \neq 0$, on a :

$$(f^*(f(x)), x) = (f(x), f(x)) > 0,$$

car $f(x) \neq 0$ puisque f est inversible. Prouvons d'abord l'unicité, en supposant que $f = h_1 \circ g_1 = h_2 \circ g_2$. On a nécessairement $f^* \circ f = g_1^2 = g_2^2$. Puisque g_1 et g_2 doivent être symétriques positifs, le résultat des questions précédentes prouve que $g_1 = g_2$. On en déduit, en inversant g_1 et g_2 , que $h_1 = h_2$. Ce raisonnement nous guide alors pour l'existence. Posons g la racine carrée positive de $f^* \circ f$, qui est donnée par les questions précédentes. Il faut remarquer que g est définie positive, car g est inversible puisque g^2 l'est. On pose ensuite $h = f \circ g^{-1}$, de sorte que $h^* \circ h = g^{-1} f^* \circ f g^{-1} = g^{-1} g^2 g^{-1} = Id_E$, ce qui prouve que h est un endomorphisme orthogonal.

9. On remarque d'abord que $f^* \circ f$ est symétrique. De plus, si $x \neq 0$, on a :

$$(f^*(f(x)), x) = (f(x), f(x)) > 0,$$

car $f(x) \neq 0$ puisque f est inversible.

10. Prouvons d'abord l'unicité, en supposant que $f = h_1 \circ g_1 = h_2 \circ g_2$. On a nécessairement $f^* \circ f = g_1^2 = g_2^2$. Puisque g_1 et g_2 doivent être symétriques positifs, le résultat des questions précédentes prouve que $g_1 = g_2$. On en déduit, en inversant g_1 et g_2 , que $h_1 = h_2$. Ce raisonnement nous guide alors pour l'existence. Posons g la racine carrée positive de $f^* \circ f$, qui est donnée par les questions précédentes. Il faut remarquer que g est définie positive, car g est inversible puisque g^2 l'est. On pose ensuite $h = f \circ g^{-1}$, de sorte que $h^* \circ h = g^{-1} f^* \circ f g^{-1} = g^{-1} g^2 g^{-1} = Id_E$, ce qui prouve que h est un endomorphisme orthogonal.

Correction de l'exercice 27 ▲

On va prouver que ce sont les matrices diagonales dont les coefficients diagonaux sont égaux à ± 1 . Commençons par la première colonne de la matrice M orthogonale et triangulaire supérieure. Puisque sa norme vaut 1, et que seul le premier coefficient est non-nul, celui-ci vaut ± 1 . Considérons désormais la deuxième colonne, dont les coefficients éventuellement non-nuls sont $m_{1,2}$ et $m_{2,2}$. Puisque la première colonne est orthogonale à cette colonne, on a $\pm m_{1,2} = 0$ et donc $m_{1,2} = 0$. En considérant la norme, on trouve que $m_{2,2} = \pm 1$. Considérons maintenant la troisième colonne. Ses coefficients éventuellement non-nuls sont $m_{1,3}$, $m_{2,3}$ et $m_{3,3}$. Écrivons que la troisième colonne est orthogonale à la première. On trouve $m_{1,3} = 0$. Écrivons ensuite que la troisième colonne est orthogonale à la seconde. On trouve $m_{2,3} = 0$. Le calcul de la norme donne $m_{3,3} = \pm 1$. On continue ainsi pour chaque colonne. Réciproquement, une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont égaux à ± 1 est bien une matrice orthogonale.

Correction de l'exercice 28 ▲

1. On sait que $M \in O_3(\mathbb{R})$ si et seulement si les colonnes forment une base orthonormale de \mathbb{R}^3 . Or, le produit scalaire de deux colonnes différentes est toujours égal à σ , et la norme de chaque colonne vaut $(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}$. On a donc

$$M \in O_3(\mathbb{R}) \iff \sigma = 0 \text{ et } (a^2 + b^2 + c^2) = 1.$$

Or, si $\sigma = 0$, on a

$$S^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\sigma = a^2 + b^2 + c^2.$$

On en déduit donc que

$$M \in O_3(\mathbb{R}) \iff \sigma = 0 \text{ et } S^2 = 1 \iff \sigma = 0 \text{ et } S = \pm 1.$$

2. On a

$$M \in SO_3(\mathbb{R}) \iff M \in O_3(\mathbb{R}) \text{ et } \det(M) = 1 \iff \sigma = 0 \text{ et } S = \pm 1 \text{ et } \det(M) = 1.$$

Calculons le déterminant de M . On a

$$\begin{aligned} \det(M) &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & a & b \\ a+b+c & c & a \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} \\ &= S \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & c-b & a-c \end{vmatrix} \\ &= S(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\ &= S(S^2 - 3\sigma). \end{aligned}$$

Maintenant, si on sait déjà que $S = \pm 1$ et $\sigma = 0$, alors $\det(M) = S$, et donc $\det(M) = 1$ est équivalent à $S = 1$.

Correction de l'exercice 29 ▲

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \cap O_n(\mathbb{R})$. Alors on sait que, pour tout $j = 1, \dots, n$,

$$\sum_{i=1}^n a_{i,j}^2 = 1.$$

Puisque $a_{i,j} \in \mathbb{Z}$, ceci n'est possible que s'il existe $\phi(j) \in \{1, \dots, n\}$ tel que $a_{\phi(j),j} = \pm 1$ et $a_{i,j} = 0$ pour tout $i \neq \phi(j)$. De plus, deux colonnes sont non colinéaires. Ainsi, $\phi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ est injective, donc bijective puisqu'on travaille avec des ensembles finis. Ainsi, il y a au plus $2^n \cdot n!$ telles matrices (le 2^n correspond au choix des signes, le $n!$ aux permutations des vecteurs). Réciproquement, si on se donne des signes $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$, $i = 1, \dots, n$, et si les colonnes de A constituent une permutation des vecteurs $\varepsilon_i e_i$, où (e_1, \dots, e_n) est la base canonique de \mathbb{R}^n , alors A est orthogonale. Il y a donc exactement $2^n \times n!$ matrices de $O_n(\mathbb{R})$ à coefficients entiers.

Correction de l'exercice 30 ▲

1. Remarquons que $m_{i,j} = (C_j, e_i)$. Ainsi, $\sum_{j=1}^n m_{i,j} = (v, e_i)$, d'où le résultat en sommant sur i , et en utilisant la linéarité du produit scalaire.

2. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j} \right| \leq \|u\| \|v\|.$$

Mais comme (e_j) et (C_j) sont des bases orthonormales de \mathbb{R}^n (la deuxième car M est orthogonale, ce qui équivaut à dire que ses vecteurs colonnes forment une base orthonormale), on a par le théorème de Pythagore

$$\|u\|^2 = \|v\|^2 = n.$$

Ceci donne l'inégalité demandée. Cette inégalité est optimale, car I_n est orthogonale, et la valeur absolue de la somme de ses coefficients fait n .

3. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{i=1}^n |m_{i,j}| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n m_{i,j}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n 1^2} = \|C_j\| \times n^{1/2} = n^{1/2}.$$

On somme alors sur j et comme il y a n termes dans la somme, on trouve le résultat voulu.

4. Le point clé est de remarquer que

$$\sum_{i=1}^n |m_{i,j}| \geq \left(\sum_{i=1}^n m_{i,j}^2 \right)^{1/2}$$

(c'est-à-dire que la norme 1 est plus grande que la norme 2). Ceci se prouve très facilement en mettant les deux membres au carré. Une fois ceci prouvé, on écrit que

$$\sum_{i=1}^n |m_{i,j}| \geq \|C_j\| = 1,$$

et à nouveau on somme n fois cette inégalité pour trouver le résultat voulu.

Correction de l'exercice 31 ▲

1. Notons (x_1, \dots, x_n) la base \mathcal{B} et (u_1, \dots, u_n) son orthonormalisée de Schmidt. Puisque, pour tout $1 \leq p \leq n$, $\text{vect}(u_1, \dots, u_p) = \text{vect}(x_1, \dots, x_p)$, la matrice de passage est triangulaire supérieure. De plus, les coefficients sur la diagonale sont égaux à $\langle u_i, x_i \rangle$. Ils sont donc strictement positifs.

2. Notons x_1, \dots, x_n les vecteurs colonnes de A . Alors puisque la matrice A est inversible, la famille (x_1, \dots, x_n) est une base de \mathbb{R}^n . Notons \mathcal{B} cette base et \mathcal{C} l'orthonormalisée de Schmidt de \mathcal{B} . Notons Q la matrice de passage de la base canonique à \mathcal{C} , et R la matrice de passage de \mathcal{C} à \mathcal{B} . Alors, par les formules de changement de base, on a

$$A = QR.$$

Mais Q est orthogonale, car on passe d'une base orthonormée à une autre, et R est triangulaire supérieure d'après la question précédente.

3. Imaginons que l'on puisse écrire $A = Q_1 R_1 = Q_2 R_2$. Il vient

$$Q_2^{-1} Q_1 = R_2 R_1^{-1}.$$

Mais $Q_2^{-1} Q_1$ est une matrice orthogonale (pourquoi ?) et $R_2 R_1^{-1}$ est une matrice triangulaire supérieure, à coefficients diagonaux strictement positifs (pourquoi ?). Or, une matrice orthogonale qui est aussi triangulaire supérieure est diagonale (pourquoi ?), et ses coefficients diagonaux sont égaux à ± 1 . Comme ici les coefficients diagonaux sont strictement positifs, ils sont égaux à 1, et $Q_2^{-1} Q_1 = I_n$, soit $Q_2 = Q_1$, et par suite $R_2 = R_1$.

Correction de l'exercice 32 ▲

Il faut d'abord prouver que ϕ est une symétrie, c'est-à-dire que $\phi \circ \phi = Id$. Mais c'est clair, car $P(-(-X)) = P(X)$. Il faut aussi démontrer que ϕ est une symétrie orthogonale, c'est-à-dire que ϕ conserve le produit scalaire, ou encore que

$$\langle \phi(P), \phi(Q) \rangle = \langle P, Q \rangle$$

pour tous polynômes $P, Q \in E$. Mais,

$$\langle \phi(P), \phi(Q) \rangle = \int_{-1}^1 P(-t)Q(-t)dt = \int_{-1}^1 P(u)Q(u)du = \langle P, Q \rangle,$$

le seul argument utilisé étant le changement de variables $u = -t$.

Correction de l'exercice 33 ▲

Posons $F = \text{vect}(a)$ et $G = a^\perp$. Soit $x \in E$, que l'on décompose en $x = g + \lambda a$, avec $g \in G$. On a alors :

$$s_a(x) = x - 2 \frac{(a, \lambda a)}{(a, a)} a = \lambda a + g - 2\lambda a = g - \lambda a.$$

Ceci prouve en particulier, à l'aide de la relation de Pythagore, que $\|x\|^2 = \|s_a(x)\|^2 = \|g\|^2 + \lambda^2 \|a\|^2$, et que l'endomorphisme est orthogonal. Le calcul précédent prouve en outre que $\ker(s_a - id) = G$ et $\ker(s_a + id) = \text{vect}(a)$. Ainsi, on a

$$\ker(s_a - id) \oplus^\perp \ker(s_a + id) = E.$$

s_a est la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan a^\perp .

Correction de l'exercice 34 ▲

1. Si on a $\langle u(x), v(x) \rangle = \|u(x)\| \cdot \|v(x)\|$, on se retrouve dans le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz (sans les valeurs absolues) et on a $v(x) = \lambda u(x)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Mais puisque u et v sont des isométries vectorielles, on a $\|u(x)\| = \|v(x)\| = \|x\|$, et donc $\lambda = 1$ ce qui n'est pas possible.

2. Supposons que $u \neq v$. Soit $x \in E$ tel que $u(x) \neq v(x)$. Alors d'après la question précédente, $\langle u(x), v(x) \rangle < \|u(x)\| \cdot \|v(x)\| = \|x\|^2$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \|(1 - \lambda)u(x) + \lambda v(x)\|^2 &= (1 - \lambda)^2 \|u(x)\|^2 + \lambda^2 \|v(x)\|^2 + 2\lambda(1 - \lambda) \langle u(x), v(x) \rangle \\ &< (1 - \lambda)^2 \|x\|^2 + \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda(1 - \lambda) \|x\|^2 \\ &< ((1 - \lambda) + \lambda)^2 \|x\|^2 \\ &< \|x\|^2. \end{aligned}$$

Ainsi, $\lambda u + (1 - \lambda)v \notin O(E)$. Par contraposée, si $\lambda u + (1 - \lambda)v \in O(E)$, alors $u = v$.

Correction de l'exercice 35 ▲

On va faire un raisonnement par analyse/synthèse. On remarque d'abord que f est clairement linéaire. Supposons que f est orthogonale. Alors pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\|f(M)\|^2 = \|M\|^2$. Mais,

$$\begin{aligned}\|f(M)\|^2 &= \langle aM + bM^T, aM + bM^T \rangle \\ &= \text{Tr}((aM^T + bM)(aM + bM^T)) \\ &= \text{Tr}(abM^2 + ab(M^T)^2 + a^2M^T M + b^2MM^T).\end{aligned}$$

Utilisant que $\text{Tr}(A^T) = \text{Tr}(A)$, on trouve

$$\|f(M)\|^2 = 2ab\text{Tr}(M^2) + (a^2 + b^2)\text{Tr}(M^T M).$$

On en déduit alors que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$2ab\text{Tr}(M^2) + (a^2 + b^2)\text{Tr}(M^T M) = \text{Tr}(M^T M).$$

Pour $M = E_{1,2}$, on a $M^T M = E_{2,2}$ et $M^2 = 0$, et donc on en déduit

$$a^2 + b^2 = 1.$$

Pour $M = E_{1,1}$, on a $M^T M = M^2 = E_{1,1}$ et donc

$$ab = 0.$$

Réciproquement, le calcul précédent montre que si $a^2 + b^2 = 1$ et $ab = 0$, alors l'endomorphisme est orthogonal. Pour conclure, on remarque que le système

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ ab = 0 \end{cases}$$

a pour solutions les couples $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$.

Correction de l'exercice 36 ▲

1. Soit (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée de E . Remarquons d'abord que le résultat est immédiat si $n = 1$, les seules applications linéaires de \mathbb{R} dans \mathbb{R} étant les applications de la forme $u(x) = kx$. Supposons maintenant que $n \geq 2$ et pour $i \in \{2, \dots, n\}$, posons $x = e_1 + e_i$ et $y = e_1 - e_i$. Alors

$$\langle x, y \rangle = \langle e_1, e_1 \rangle - \langle e_i, e_i \rangle = 0.$$

On en déduit que $\langle u(x), u(y) \rangle = 0$. Mais en développant, on trouve

$$\langle u(x), u(y) \rangle = \langle u(e_1), u(e_1) \rangle - \langle u(e_i), u(e_i) \rangle.$$

Ainsi, en notant $k^2 = \langle u(e_1), u(e_1) \rangle$, on a $\langle u(e_i), u(e_i) \rangle = k^2$ pour tout $i = 1, \dots, n$. De plus, on a pour $i \neq j$,

$$\langle u(e_i), u(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = 0.$$

Ainsi, $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une famille orthogonale de E . Maintenant, si $x \in E$, on le décompose en $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ de sorte que $u(x) = \sum_{i=1}^n x_i u(e_i)$. On calcule la norme de $\|u(x)\|$ en utilisant la famille orthogonale $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ de sorte que

$$\|u(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \|u(e_i)\|^2 = k^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = k^2 \|x\|^2.$$

2. Si $k = 0$, alors $u = 0$ et u est la composée de l'homothétie de rapport 0 et de n'importe quel endomorphisme orthogonal. Si $k \neq 0$, notons h l'homothétie de rapport k , de sorte que h^{-1} est l'homothétie de rapport

$1/k$. Alors, si $v = h^{-1} \circ u$, on a $\|v(x)\| = \frac{1}{k} \|u(x)\| = \|x\|$. Donc v est un endomorphisme orthogonal et $u = h \circ v$ est bien la composée d'un endomorphisme orthogonal et d'une homothétie.

Correction de l'exercice 37 ▲

1. Prenons $x \in E$. Puisque u est un automorphisme de E , on sait qu'il existe un unique $y \in E$ tel que $x = u(y)$. On a alors la chaîne d'équivalence :

$$\begin{aligned} x \in u(F^\perp) &\iff y \in F^\perp \\ &\iff \forall z \in F, \langle y, z \rangle = 0 \\ &\iff \forall z \in F, \langle u(y), u(z) \rangle = 0 \\ &\iff \forall z \in F, \langle x, u(z) \rangle = 0 \\ &\iff x \in [u(F)]^\perp. \end{aligned}$$

2. Remarquons d'abord que si F est stable par u , on a en réalité $u(F) = F$. En effet, u étant un automorphisme de E , il préserve la dimension des sous-espaces. Supposons ensuite que F est stable par u , et donc que $u(F) = F$. Alors d'après la question précédente, on a :

$$u(F^\perp) = [u(F)]^\perp = F^\perp$$

et donc F^\perp est stable par u . La réciproque se démontre exactement de la même façon, en remarquant que $(F^\perp)^\perp = F$.

Correction de l'exercice 38 ▲

1. Soit (e_1, \dots, e_n) une base orthonormale de E . Alors on a, pour tout i, j dans $\{1, \dots, n\}$,

$$\langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle$$

ce qui prouve bien que $(f(e_i))$ est une base orthonormale de E .

2. On travaille toujours dans la base orthonormée précédente. Prenons $x \in E$ et écrivons-le

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Alors

$$\langle f(x), f(e_i) \rangle = \langle x, e_i \rangle.$$

De plus, puisque $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base orthonormale de E , on sait que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^n \langle f(x), f(e_i) \rangle f(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle f(e_i). \end{aligned}$$

Autrement dit, on a prouvé que si on écrit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, alors $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i)$. Ceci suffit à prouver que f est linéaire. En effet, prenons également $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on a d'une part :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) \\ f(y) &= \sum_{i=1}^n y_i f(e_i) \\ f(x) + \lambda f(y) &= \sum_{i=1}^n (x_i + \lambda y_i) f(e_i) \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}x + \lambda y &= \sum_{i=1}^n (x_i + \lambda y_i) e_i \\f(x + \lambda y) &= \sum_{i=1}^n (x_i + \lambda y_i) f(e_i)\end{aligned}$$

ce qui prouve bien que f est linéaire.

Correction de l'exercice 39 ▲

1. Soit $x \in \ker v$, c'est-à-dire que $u(x) = x$. Alors, pour tout $y \in \operatorname{Im}(v)$, $y = v(z) = u(z) - z$, on a

$$\langle x, y \rangle = \langle x, u(z) - z \rangle = \langle x, u(z) \rangle - \langle x, z \rangle = \langle u(x), u(z) \rangle - \langle x, z \rangle = 0$$

car u est un endomorphisme orthogonal. On a donc $\ker(v) \subset (\operatorname{Im}(v))^\perp$. Comme, par le théorème du rang et le fait que $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$, ces deux sous-espaces ont la même dimension, ils sont donc égaux. L'autre égalité se déduit immédiatement en prenant les orthogonaux.

2. Écrivons $x = a + b$ avec $a \in \ker(v)$ et $b \in \ker(v)^\perp$. Puisque $v(a) = 0$, on a $u(a) = a$, et donc il est facile de vérifier que $u_n(a) = a$. D'autre part, calculons $u_n(b)$. Pour cela, on remarque que $b \in \operatorname{Im}(v)$ et donc que $b = v(c) = u(c) - c$. Mais alors,

$$\begin{aligned}u_n(b) &= u_n(v(c)) \\&= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^{k+1}(c) - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k(c) \\&= \frac{1}{n} u^n(c) - \frac{1}{n} c\end{aligned}$$

et ceci tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini (on utilise à nouveau que l'endomorphisme est orthogonal, et donc que $\|u^n(c)\| = \|c\|$). On en déduit que $u_n(x)$ tend vers a , le projeté orthogonal de x sur $\ker v$.

Correction de l'exercice 40 ▲

1. Si $\dim(E) = 1$, alors ou bien $u = \operatorname{Id}$ ou bien $u = -\operatorname{Id}$. Dans le second cas, on a déjà une réflexion (si $\dim(E) = 1$, le seul hyperplan de E est $\{0\}$). Dans le premier cas, on écrit $\operatorname{Id} = (-\operatorname{Id}) \circ (-\operatorname{Id})$. Si $\dim(E) = 2$, alors ou bien $u \in O(E) \setminus SO(E)$ et dans ce cas u est une réflexion ou bien $u \in SO(E)$. Fixons alors s une réflexion de E . Alors $v = s \circ u \in O(E)$ et $\det(v) = \det(s) \det(u) = -1$ donc v est une réflexion. Ainsi, $u = v \circ s^{-1} = v \circ s$ et donc $O(E)$ est bien engendré par les réflexions.

2. On commence par démontrer un résultat intermédiaire : soit F un sous-espace de E différent de $\{0\}$ et de E . Soit $\sigma \in O(F)$ une réflexion. Alors l'endomorphisme u défini sur E par $u(x) = \sigma(x)$ si $x \in F$ et par $u(x) = x$ si $x \in F^\perp$ est une réflexion. En effet, une réflexion est un endomorphisme tel qu'il existe une base orthonormée de l'espace tel que la matrice de l'endomorphisme dans cette base est $\operatorname{diag}(-1, 1, \dots, 1)$. Ici, il suffit de prendre une base orthonormée \mathcal{B}' de F dans laquelle la matrice de σ a cette forme, et de la compléter par n'importe quelle base orthonormée de F^\perp . On va alors démontrer le résultat par récurrence sur $\dim(E)$. L'initialisation a été réalisée dans la question précédente pour $\dim(E) \in \{1, 2\}$. On suppose que $\dim(E) \geq 3$ et que le résultat a été démontré pour tout isométrie vectorielle d'un espace euclidien de dimension inférieure stricte à $\dim(E)$. D'après le rappel, u admet un sous-espace F de dimension 1 ou 2 qui est stable. Puisque u est orthogonale, on sait que F^\perp est aussi stable par u . Notons u_F et u_{F^\perp} les endomorphismes induits par u sur F et sur F^\perp . Ce sont des isométries vectorielles et $\dim(F), \dim(F^\perp) < \dim(E)$. Par hypothèse de récurrence, il existe des réflexions $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ de F et des réflexions $\sigma'_1, \dots, \sigma'_q$ de F^\perp telles que

$$u_F = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_p \text{ et } u_{F^\perp} = \sigma'_1 \circ \dots \circ \sigma'_q.$$

D'après le résultat préliminaire, on peut prolonger chaque σ_i en une réflexion s_i sur E , avec $s_i(x) = x$ si $x \in F^\perp$, et on peut prolonger chaque σ'_i en une réflexion s'_i sur E , avec $s'_i(x) = x$ si $x \in F$. Il est alors facile de vérifier que

$$u = s_1 \circ \dots \circ s_p \circ s'_1 \circ \dots \circ s'_q,$$

les deux endomorphismes coïncidant sur chacun des sous-espaces supplémentaires F et F^\perp .

Correction de l'exercice 41 ▲

Soit λ une valeur propre de u , de vecteur propre associé x . Alors on a

$$\|x\| = \|u(x)\| = |\lambda| \times \|x\|.$$

Ainsi, on a $\lambda = \pm 1$. Ainsi, dans une base de vecteurs propres, la matrice de u est constituée de 1 et de -1 sur la diagonale. C'est bien la matrice d'une symétrie.

Correction de l'exercice 42 ▲

On commence par remarquer que, comme $u^2 = -\text{Id}_E$, u ne peut pas admettre de valeur propre réelle (une telle valeur propre λ vérifierait $\lambda^2 = -1$). D'après le théorème de réduction des symétries vectorielles, il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de E de sorte que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} R(\theta_1) & 0 \\ 0 & R(\theta_2) \end{pmatrix}.$$

Puisque $u^2 = -\text{Id}_E$, on doit avoir $R(2\theta_j) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ pour $j = 1, 2$. Il est facile de voir que ceci entraîne que $2\theta_j = \pi [2\pi]$ ou encore que $\theta_j = \frac{\pi}{2} [\pi]$. Maintenant, si $\theta_1 = -\frac{\pi}{2} [\pi]$, il suffit de remplacer la base \mathcal{B} par $(-e_1, e_2, e_3, e_4)$ pour pouvoir choisir un angle égal à $\pi/2$. De même, si $\theta_2 = -\frac{\pi}{2} [\pi]$, on remplace (e_3, e_4) par $(-e_3, e_4)$.

Correction de l'exercice 43 ▲

Il suffit de déterminer les rotations et les symétries qui envoient u sur v . Pour les rotations, c'est très simple : il ne peut que s'agir de la rotation d'angle (u, v) . Pour les symétries, il y a deux cas à distinguer :

Si $u = v$ ou si $u = -v$, alors il ne peut s'agir que de la symétrie orthogonale par rapport à $\text{vect}(u, v)$. Si u et v ne sont pas colinéaires, alors soit s une symétrie orthogonale par rapport à la droite D qui envoie u sur v . Notons e_1 un vecteur directeur unitaire de D , et e_2 un vecteur unitaire orthogonal à e_1 . L'expression analytique de la symétrie s est

$$s(x_1 e_1 + x_2 e_2) = x_1 e_1 - x_2 e_2.$$

Notons $u = u_1 e_1 + u_2 e_2$ et $v = v_1 e_1 + v_2 e_2$. Alors $s(u) = v$ entraîne $u_1 = v_1$ et $u_2 = -v_2$. Faisons la somme de u et v , on en déduit que e_1 est proportionnelle à $u + v$ et donc s est la symétrie orthogonale par rapport à $\text{vect}(u + v)$. Réciproquement, la symétrie orthogonale s par rapport à $\text{vect}(u + v)$ envoie bien u sur v . En effet, puisque $\|u\| = \|v\| = 1$, $u + v$ et $u - v$ sont orthogonaux et s est aussi la symétrie par rapport à $\text{vect}(u + v)$ parallèlement à $\text{vect}(u - v)$. Écrivant $u = \frac{1}{2}((u + v) + (u - v))$, on obtient immédiatement que $s(u) = v$.

Correction de l'exercice 44 ▲

La matrice M est clairement symétrique, et on vérifie qu'elle est orthogonale en vérifiant que les vecteurs colonnes sont de norme 1 et orthogonaux deux à deux. Puisque M est symétrique réelle, elle est diagonalisable dans \mathbb{R} , notons λ_1, λ_2 et λ_3 ses valeurs propres. Puisque M est une matrice orthogonale, c'est une isométrie et donc $\lambda_i \in \{-1, 1\}$. De plus, on sait que M est semblable à la matrice diagonale avec λ_1, λ_2 et λ_3 sur la diagonale. Comme la trace est un invariant de similitude, on doit avoir $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$. La seule possibilité est que 1 est valeur propre double, et -1 est valeur propre simple. De plus, puisque M est diagonalisable, son polynôme minimal est scindé à racines simples et vaut donc $(X - 1)(X + 1)$.

Correction de l'exercice 45 ▲

1. On commence par remarquer que les vecteurs colonnes sont unitaires et deux à deux orthogonaux, donc $A \in O_3(\mathbb{R})$. On montre ensuite facilement que $\det(A) = 1$, d'où $A \in SO_3(\mathbb{R})$.

2. Il est facile de vérifier que l'espace propre associé à 1 est $\text{vect}(e_1)$, où

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. On remarque que $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est dans $\text{vect}(e_1)^\perp$ si et seulement si

$$x + y + z = 0 \iff \begin{cases} x &= -y - z \\ y &= y \\ z &= z \end{cases}$$

Une base de $\text{vect}(e_1)^\perp$ est donc donnée par (u_2, u_3) , où

$$u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On lui applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt et on trouve une base orthonormale (e_2, e_3) de $\text{vect}(e_1)^\perp$ avec

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La famille (e_1, e_2, e_3) est alors une base orthonormée de \mathbb{R}^3 .

4. Le cours nous dit que A est une rotation d'axe $\text{vect}(e_1)$. Notons P la matrice orthogonale de passage de la base canonique à (e_1, e_2, e_3) . Alors un petit calcul montre que

$$P^{-1}AP = P^TAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}.$$

La matrice P précédente et le réel $\theta = \frac{-2\pi}{3}$ conviennent.
